Regularność funkcji asymptotycznie harmonicznych

Antoni Kijowski

22 Października 2020

Based on a joint work with Tomasz Adamowicz and Elefterios Soultanis

Przypomnienie

Twierdzenie Gaussa-Koebego

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty. Dla funkcji $u \in C(\Omega)$ równoważne są warunki

- u jest harmoniczna w Ω, tj. $\Delta u = 0$,
- u ma własność wartości średniej:

$$\forall\, B(x,r) \Subset \Omega \qquad u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy \tag{MVP}$$

Przypomnienie

(X, d, μ) przestrzeń metryczna z miarą, $0 < \mu(B) < \infty$

Definicja

Niech $\Omega \subset X$ otwarty. Powiemy, że funkcja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ jest silnie harmonicza na Ω, jeśli zachodzi dla niej własność wartości średniej, tj. dla wszystkich $B(x, r) \Subset \Omega$:

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y) d\mu(y).$$

Adamowicz, Gaczkowski, Górka, Warhurst

Asymptotyczna własność wartości średniej

Twierdzenie Blaschke–Privaloff–Zaremba

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, $u \in C(\Omega)$ oraz dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{B(x,r)} u(y)dy - u(x) \right) = 0.$$

Wówczas u jest harmoniczna.

Asymptotyczna własność wartości średniej

Twierdzenie Blaschke–Privaloff–Zaremba

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, $u \in C(\Omega)$ oraz dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{B(x,r)} u(y)dy - u(x) \right) = 0.$$

Wówczas u jest harmoniczna.

Obserwacja: dla $u \in C^2(\Omega)$, $|y - x| < r$ ze wzoru Taylora mamy

$$u(y) = u(x) + \langle y - x, \nabla u(x) \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 u(x)(y - x), y - x \rangle + o(r^2)$$

Asymptotyczna własność wartości średniej

Twierdzenie Blaschke–Privaloff–Zaremba

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, $u \in C(\Omega)$ oraz dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{B(x,r)} u(y)dy - u(x) \right) = 0.$$

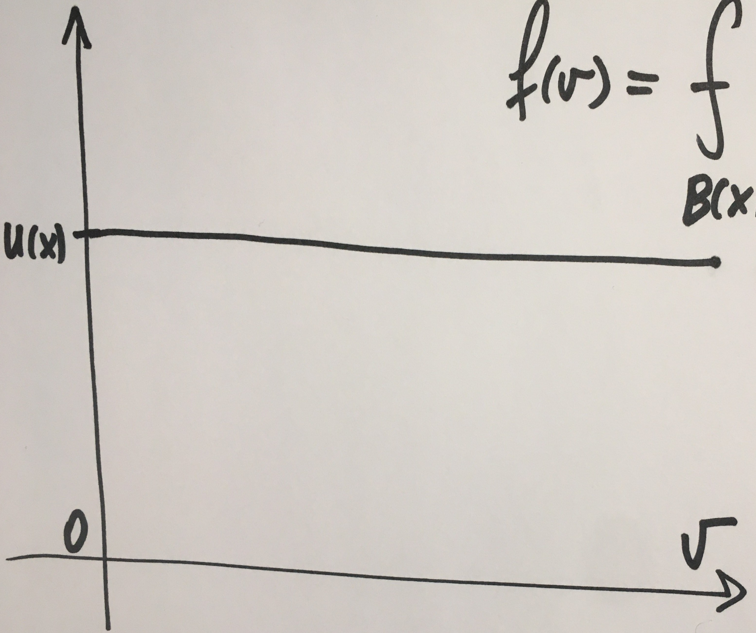
Wówczas u jest harmoniczna.

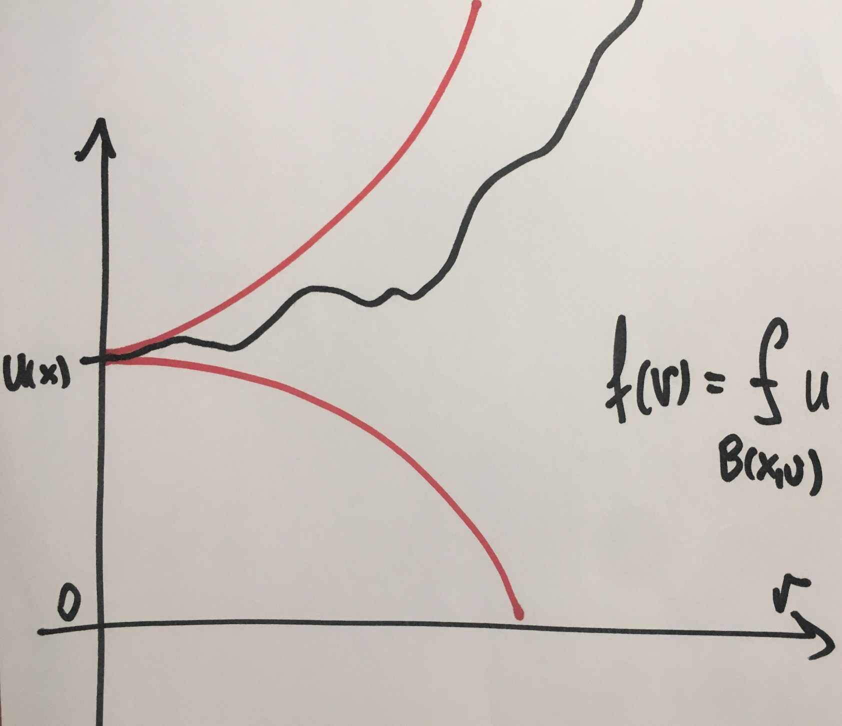
Obserwacja: dla $u \in C^2(\Omega)$, $|y - x| < r$ ze wzoru Taylora mamy

$$u(y) = u(x) + \langle y - x, \nabla u(x) \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 u(x)(y-x), y - x \rangle + o(r^2)$$

$$\fint_{B(x,r)} u(y)dy = u(x) + r^2 \frac{\Delta u(x)}{2(n+2)} + o(r^2)$$

$$f(v) = \fint_{B(x,v)} u \, d\mu$$





$$f(r) = \fint_{B(x,r)} u \, d\mu$$

Operator AMVP definiujący harmoniczność

(X, d, μ) przestrzeń metryczna z miarą, $0 < \mu(B) < \infty$

Definicja

Dla $u \in L^1_{loc}(X)$, $x \in X$, $r > 0$ definiujemy r-laplasjan funkcji u jako

$$\Delta^r u(x) := \frac{1}{r^2}\left(\fint_{B(x,r)} u(y)dy - u(x) \right).$$

Burago–Kurylev–Ivanov, Minne–Tewodrose, Córdoba–Ocáriz

Operator AMVP definiujący harmoniczność

(X, d, μ) przestrzeń metryczna z miarą, $0 < \mu(B) < \infty$

Definicja

Dla $u \in L^1_{loc}(X)$, $x \in X$, $r > 0$ definiujemy r-laplasjan funkcji u jako

$$\Delta^r u(x) := \frac{1}{r^2}\left(⨍_{B(x,r)} u(y)dy - u(x) \right).$$

Burago–Kurylev–Ivanov, Minne–Tewodrose, Córdoba–Ocáriz

Za BPZ powiemy, że funkcja u jest harmoniczna o ile

$$\Delta^r u \xrightarrow{r \to 0^+} 0.$$

Operator AMVP definiujący harmoniczność

(X, d, μ) przestrzeń metryczna z miarą, $0 < \mu(B) < \infty$

Definicja

Dla $u \in L^1_{loc}(X)$, $x \in X$, $r > 0$ definiujemy r-laplasjan funkcji u jako

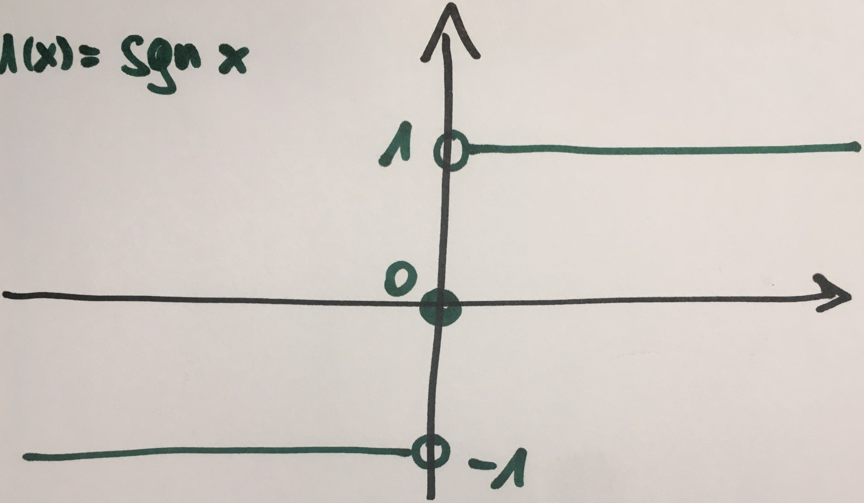
$$\Delta^r u(x) := \frac{1}{r^2}\left(\fint_{B(x,r)} u(y)dy - u(x) \right).$$

Burago–Kurylev–Ivanov, Minne–Tewodrose, Córdoba–Ocáriz

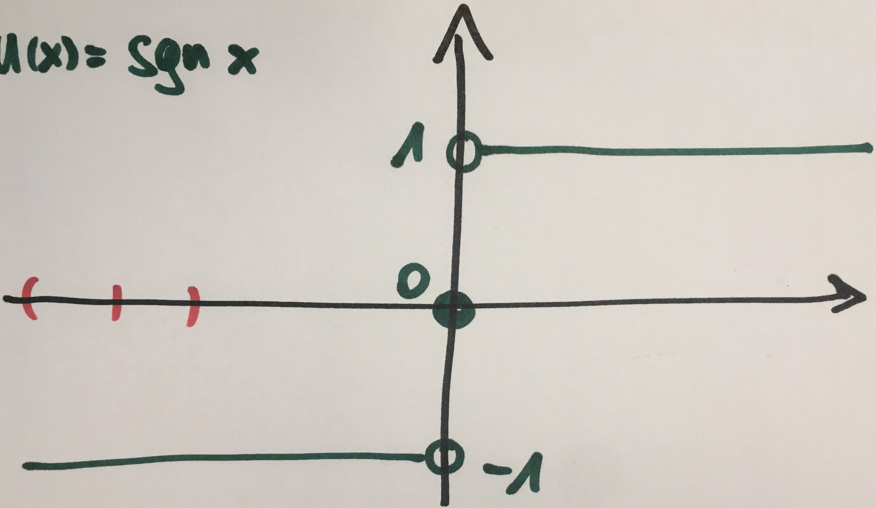
Za BPZ powiemy, że funkcja u jest harmoniczna o ile

$$\underbrace{\Delta^r u \xrightarrow{r \to 0^+} 0.}_{\text{punktowo/jednostajnie/w normie/słabo/?}}$$

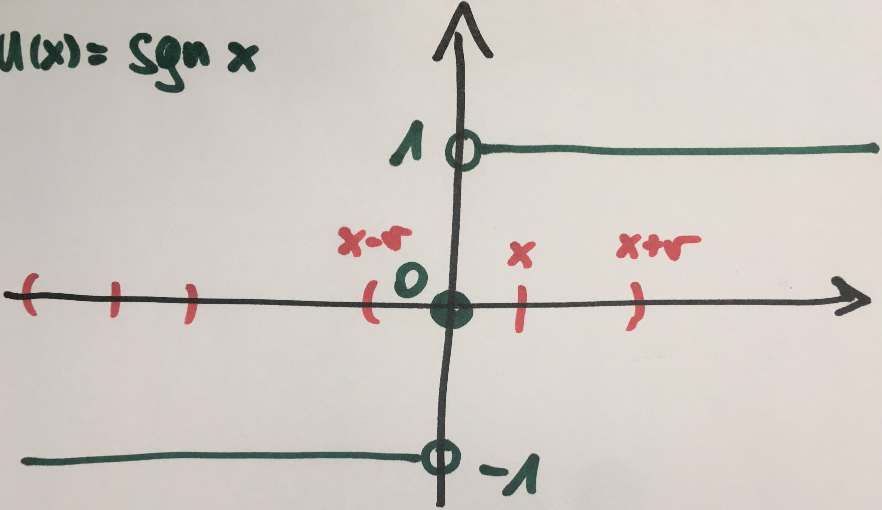
$u(x) = \operatorname{sgn} x$



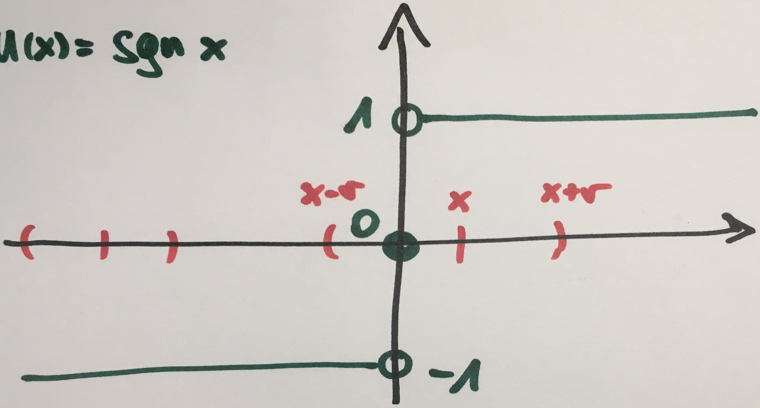
$u(x) = \operatorname{sgn} x$



$u(x) = \operatorname{sgn} x$



$u(x) = \operatorname{sgn} x$



$\cdot \; 0 < x < r$

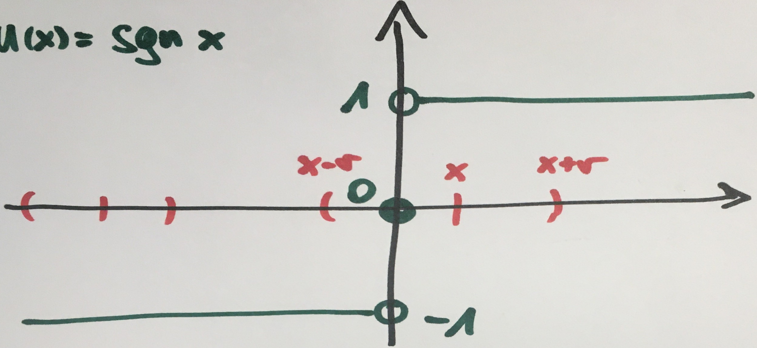
$1 \to x+r$

$-1 \to r-x$

$$\fint_{B(x,r)} u = \frac{x+r-(r-x)}{2r} = \frac{x}{r}$$

$$\Delta_r u(x) = \frac{x-r}{r^3}$$

$u(x) = \operatorname{sgn} x$



- $0 < x < v$

  $1 \to x+v$

  $-1 \to v-x$

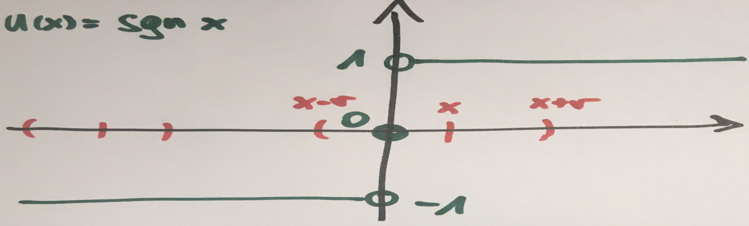
$$⨍_{B(x,v)} u = \frac{x+v-(v-x)}{2v} = \frac{x}{v}$$

$$\Delta_v u(x) = \frac{x-v}{v^3}$$

- $v < x < 0$

$$\Delta_v u(x) = \frac{v-x}{v^3}$$

$u(x) = \operatorname{sgn} x$



- $0 < x < \sigma$

$1 \to x+\sigma$

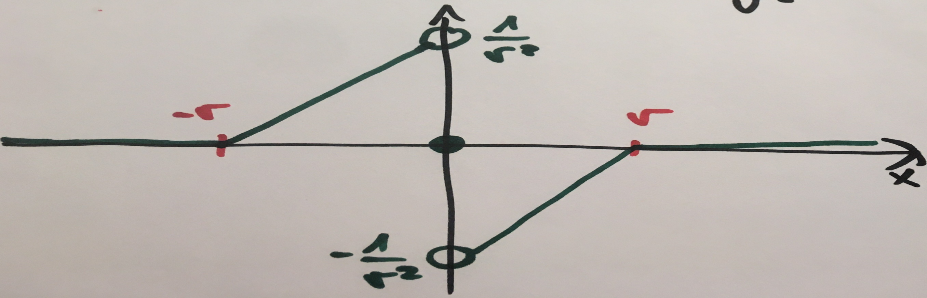
$-1 \to \sigma - x$

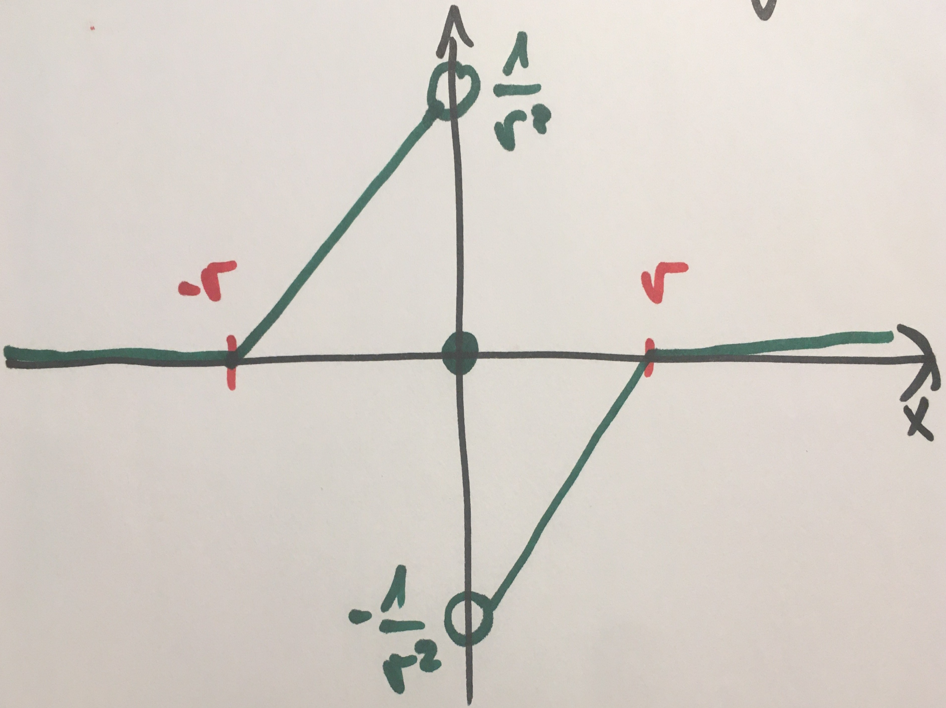
$$f_{B(x,\sigma)} u = \frac{x+\sigma-(\sigma-x)}{2\sigma} = \frac{x}{\sigma}$$

$$\Delta_\sigma u(x) = \frac{x-\sigma}{\sigma^3}$$

- $-\sigma < x < 0$

$$\Delta_\sigma u(x) = \frac{\sigma - x}{\sigma^3}$$

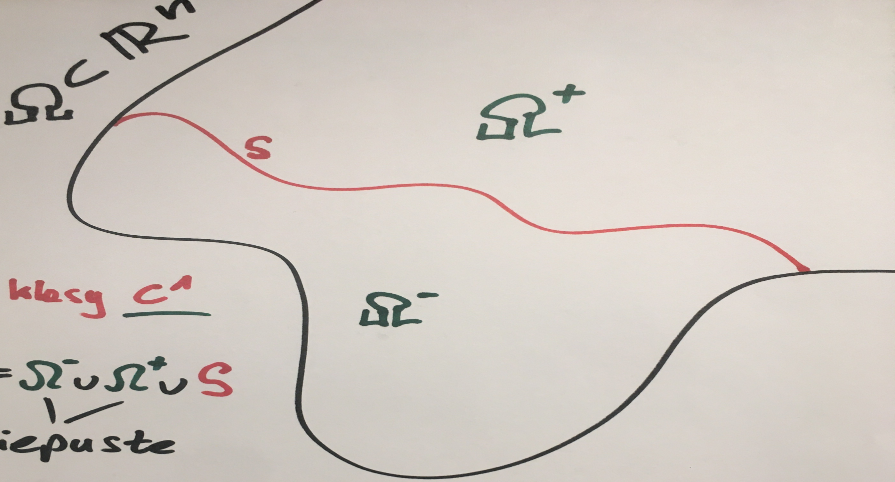




1/r²
-r
r
x
-1/r²

Co z $n > 1$?

Uogólnijmy problem do $\mathbb{R}^n$



S klasy C^1

$\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup S$

niepuste

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega^+ \\ 0 & x \in S \\ -1 & x \in \Omega^- \end{cases}$$

Twierdzenie Córdoba–Ocáriz

Niech S będzie powierzchnią klasy C^1. Wówczas

$$\Delta^r f_S \to 0$$

punktowo przy $r \to 0^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest powierzchnią minimalną

Powierzchnie minimalne

Twierdzenie Córdoba–Ocáriz

Niech S będzie powierzchnią klasy C^1. Wówczas

$$\Delta^r f_S \to 0$$

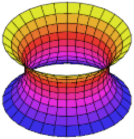
punktowo przy $r \to 0^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest powierzchnią minimalną

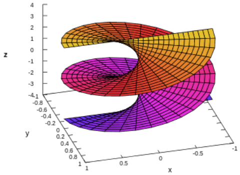
Powierzchnia minimalna

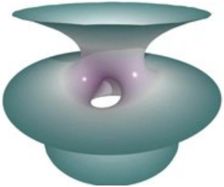
S nazywamy powierzchnią minimalną, jeśli ma średnią krzywiznę równą zero. Równoważnie, jeśli lokalnie S jest wykresem φ, to φ jest rozwiązaniem równania

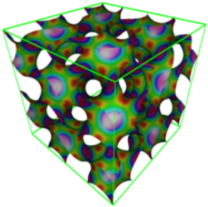
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}\right) = 0.$$

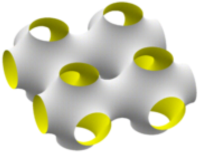
Przykłady powierzchni minimalnych











Źródło: wikipedia :)

Asymptotyczna harmoniczność i amv-norma

(X, d, μ) przestrzeń metryczna z miarą, $0 < \mu(B) < \infty$

Definicja

Mówimy, że $u \in L^1_{loc}(X)$ jest asymptotycznie harmoniczna, jeśli

$$\lim_{r \to 0} \|\Delta^r u\|_{L^\infty(K)} = 0$$

dla każdego zwartego $K \subset X$. Niech $p \in [1, \infty]$. Definiujemy przestrzeń funkcji ze skończoną amv-normą jako

$$AMV^p(X) := \{u \in L^p(X) : \|u\|_{AMV^p} < \infty\},$$

gdzie amv-norma jest dana

$$\|u\|_{AMV^p} := \limsup_{r \to 0} \|\Delta^r u\|_{L^p(X)} .$$

Regularność funkcji AMV^p

Definicja

Powiemy, że miara μ jest podwajająca, jeśli istnieje $C_\mu > 0$:

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_\mu \mu(B(x, r)).$$

$Q = \log_2 C_\mu$ nazywamy wymiarem jednorodnym.

Definicja

Powiemy, że miara μ jest podwajająca, jeśli istnieje $C_\mu > 0$:

$$\mu(B(x,2r)) \le C_\mu \mu(B(x,r)).$$

$Q = \log_2 C_\mu$ nazywamy wymiarem jednorodnym.

Twierdzenie 1

Niech $\Omega \subset X$ otwartym w lokalnie zwartej przestrzeni X z miarą podwajającą μ, wymiarem jednorodnym Q. Jeżeli $u \in AMV^p(\Omega)$ i $p > Q$, to u jest lokalnie α-hölderowska, o ile $\alpha < 1 - Q/p$.

Dodatkowo, jeśli u jest silnie harmoniczna, to jest lokalnie α-hölderowska dla każdego $\alpha \in (0,1)$.

Metoda uśredniania

Niech $u \in L^1_{loc}(X)$, $r > 0$.

$$A^r u(x) := \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} \left(\fint_{B(x,t)} u(y) d\mu(y) \right) dt$$

Lemat A

A^r jest lokalnie lipszycowska na przestrzeniach z miarą podwajającą.

Metoda uśredniania

Niech $u \in L^1_{loc}(X)$, $r > 0$.

$$A^r u(x) := \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} \left(\fint_{B(x,t)} u(y) d\mu(y) \right) dt$$

Lemat A

A^r jest lokalnie lipszycowska na przestrzeniach z miarą podwajającą.

- pierścień: $P_{r,R}(x) = \bar{B}(x,R) \setminus B(x,r)$
- $u_t(x) = \fint_{B(x,t)} u$, wtedy $A^r = \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} u_t dt$

Dowód Lematu A cz.1

Cel: dla punktów $x, y \in B(x_0, r)$ takich, że $d(x,y) < r$ dowieść:

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{Cd(x,y)}{r} \left(\fint_{B(x,2r)} |u| + \fint_{B(y,2r)} |u| \right)$$

Dowód Lematu A cz.1

Cel: dla punktów $x, y \in B(x_0, r)$ takich, że $d(x,y) < r$ dowieść:

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{Cd(x,y)}{r} \left(\fint_{B(x,2r)} |u| + \fint_{B(y,2r)} |u| \right)$$

Oznaczamy $d := d(x,y) < r$ oraz wybieramy t tak, by $r/2 \leq t \leq r$. Wtedy

Dowód Lematu A cz.1

Cel: dla punktów $x, y \in B(x_0, r)$ takich, że $d(x,y) < r$ dowieść:

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{Cd(x,y)}{r}\left(\fint_{B(x,2r)} |u| + \fint_{B(y,2r)} |u|\right)$$

Oznaczamy $d := d(x,y) < r$ oraz wybieramy t tak, by $r/2 \leq t \leq r$. Wtedy

$$|u_t(x) - u_t(y)|$$
$$= \left|\frac{1}{\mu(B(x,t)} \int_{B(x,t)} u - \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{B(y,t)} u - \frac{\mu(B(x,t)) - \mu(B(y,t))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} u\right|$$

Dowód Lematu A cz.1

Cel: dla punktów $x, y \in B(x_0, r)$ takich, że $d(x,y) < r$ dowieść:

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{Cd(x,y)}{r} \left(\fint_{B(x,2r)} |u| + \fint_{B(y,2r)} |u| \right)$$

Oznaczamy $d := d(x,y) < r$ oraz wybieramy t tak, by $r/2 \leq t \leq r$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&|u_t(x) - u_t(y)| \\
&= \left| \frac{1}{\mu(B(x,t)} \int_{B(x,t)} u - \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{B(y,t)} u - \frac{\mu(B(x,t)) - \mu(B(y,t))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} u \right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{B(x,t)} |u| + \frac{\mu(B(x,t) \triangle B(y,t))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} |u|
\end{aligned}$$

Dowód Lematu A cz.1

Cel: dla punktów $x, y \in B(x_0, r)$ takich, że $d(x,y) < r$ dowieść:

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{Cd(x,y)}{r} \left(\fint_{B(x,2r)} |u| + \fint_{B(y,2r)} |u| \right)$$

Oznaczamy $d := d(x,y) < r$ oraz wybieramy t tak, by $r/2 \leq t \leq r$. Wtedy

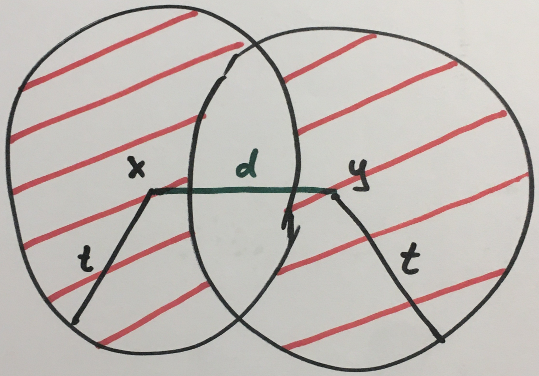
$$|u_t(x) - u_t(y)| = \left| \fint_{B(x,t)} (u - c) - \fint_{B(y,t)} (u - c) \right|$$

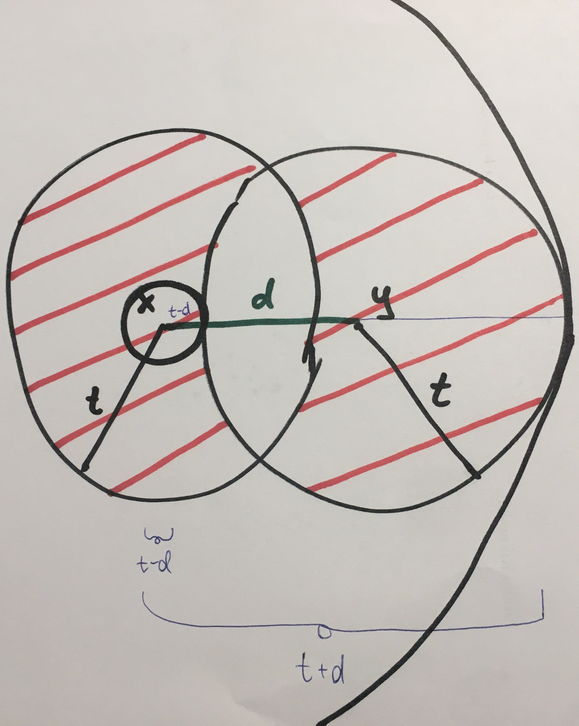
$$= \left| \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{B(x,t)} u - \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{B(y,t)} u - \frac{\mu(B(x,t)) - \mu(B(y,t))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} u \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{B(x,t)} |u| + \frac{\mu(B(x,t) \triangle B(y,t))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} |u|$$

Dowód Lematu A cz.2

Zauważmy, że $B(x,t) \triangle B(y,t) \subset P_{t-d,t+d}(x) \subset B(x,2r)$.


x
d
y
t
t


x
t-d
d
y
t
t
t-d
t+d

Dowód Lematu A cz.2

Zauważmy, że $B(x,t) \triangle B(y,t) \subset P_{t-d,t+d}(x) \subset B(x,2r)$.

Dowód Lematu A cz.2

Zauważmy, że $B(x,t) \triangle B(y,t) \subset P_{t-d,t+d}(x) \subset B(x,2r)$. Stąd

$$|u_t(x) - u_t(y)| \leq \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{P_{t-d,t+d}(x)} |u| + \frac{\mu(P_{t-d,t+d}(x))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} |u|$$

Dowód Lematu A cz.2

Zauważmy, że $B(x,t) \triangle B(y,t) \subset P_{t-d,t+d}(x) \subset B(x,2r)$. Stąd

$$|u_t(x) - u_t(y)| \leq \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{P_{t-d,t+d}(x)} |u| + \frac{\mu(P_{t-d,t+d}(x))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} |u|$$

Z podwajania miary i tego, że $r/2 \leq t \leq r$ wynika

$$|u_t(x) - u_t(y)| \leq \frac{C_\mu}{\mu(B(x,r))} \int_{P_{t-d,t+d}(x)} |u| + \frac{C_\mu^2 \mu(P_{t-d,t+d}(x))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |u|$$

Dowód Lematu A cz.2

Zauważmy, że $B(x,t) \vartriangle B(y,t) \subset P_{t-d,t+d}(x) \subset B(x,2r)$. Stąd

$$|u_t(x) - u_t(y)| \leq \frac{1}{\mu(B(x,t))} \int_{P_{t-d,t+d}(x)} |u| + \frac{\mu(P_{t-d,t+d}(x))}{\mu(B(x,t))\mu(B(y,t))} \int_{B(y,t)} |u|$$

Z podwajania miary i tego, że $r/2 \leq t \leq r$ wynika

$$|u_t(x) - u_t(y)| \leq \frac{C_\mu}{\mu(B(x,r))} \int_{P_{t-d,t+d}(x)} |u| + \frac{C_\mu^2 \mu(P_{t-d,t+d}(x))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |u|$$

Chcemy odcałkować obie strony oszacowania względem $t \in (r/2, r)$

$$|u_t(x) - u_t(y)| \leq \frac{C_\mu}{\mu(B(x,r))} \int_{P_{d-t,d+t}(x)} |u| + \frac{C_\mu^2 \mu(P_{t-d,t+d}(x))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |u|$$

Dowód Lematu A cz.3

Lemat pomocniczy

Dla nieujemnej $f \in L^1_{loc}(X)$, $0 \le r \le R < \infty$, $d_1 < d_2$ zachodzi

$$\int_r^R \int_{P_{t+d_1,t+d_2}(x)} f\, d\mu dt \le (d_2 - d_1) \int_{P_{r+d_1,R+d_2}(x)} f\, d\mu$$

Dla $f = 1$, $d_1 = -d$, i $d_2 = d$ otrzymujemy

$$\int_{r/2}^r \mu(P_{t-d,t+d}(x))dt \le 2d\mu(P_{r/2-d,r+d}(x)).$$

Dowód Lematu A cz.3

Lemat pomocniczy

Dla nieujemnej $f \in L^1_{loc}(X)$, $0 \leq r \leq R < \infty$, $d_1 < d_2$ zachodzi

$$\int_r^R \int_{P_{t+d_1,t+d_2}(x)} f\, d\mu dt \leq (d_2 - d_1) \int_{P_{r+d_1,R+d_2}(x)} f\, d\mu$$

Dla $f = 1$, $d_1 = -d$, i $d_2 = d$ otrzymujemy

$$\int_{r/2}^{r} \mu(P_{t-d,t+d}(x))dt \leq 2d\mu(P_{r/2-d,r+d}(x)).$$

Dla $f = |u|$, $d_1 = -d$, i $d_2 = d$ otrzymujemy

$$\int_{r/2}^{r} \int_{P_{t-d,t+d}(x)} |u|dt \leq 2d \int_{P_{r/2-d,r+d}(x)} |u|$$

Lemat pomocniczy

Dla nieujemnej $f \in L^1_{loc}(X)$, $0 \leq r \leq R < \infty$, $d_1 < d_2$ zachodzi

$$\int_r^R \int_{P_{t+d_1,t+d_2}(x)} f\, d\mu dt \leq (d_2 - d_1) \int_{P_{r+d_1,R+d_2}(x)} f\, d\mu$$

Dla $f = 1$, $d_1 = -d$, i $d_2 = d$ otrzymujemy

$$\int_{r/2}^r \mu(P_{t-d,t+d}(x))dt \leq 2d\mu(P_{r/2-d,r+d}(x)).$$

Dla $f = |u|$, $d_1 = -d$, i $d_2 = d$ otrzymujemy

$$\int_{r/2}^r \int_{P_{t-d,t+d}(x)} |u|dt \leq 2d \int_{P_{r/2-d,r+d}(x)} |u|$$

$$\int_{r/2}^r |u_t(x) - u_t(y)|dt \leq \frac{2dC_\mu}{\mu(B(x,r))} \int_{P_{r/2-d,r+d}(x)} |u| + \frac{2dC_\mu^2 \mu(P_{r/2-d,r+d}(x))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |u|$$

Dowód Lematu A cz.4

$$\int_{r/2}^{r} |u_t(x) - u_t(y)| dt$$

$$\leq \frac{2dC_\mu}{\mu(B(x,r))} \int_{P_{r/2-d,r+d}(x)} |u| + \frac{2dC_\mu^2 \mu(P_{r/2-d,r+d}(x))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |u|$$

$$\leq \frac{2dC_\mu \mu(B(x,2r))}{\mu(B(x,r)} \fint_{B(x,2r)} |u| + \frac{2dC_\mu^2 \mu(B(x,2r))\mu(B(y,2r))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,2r))} \fint_{B(y,2r)} |u|.$$

Dowód Lematu A cz.4

$$\int_{r/2}^{r} |u_t(x) - u_t(y)| dt$$

$$\leq \frac{2dC_\mu}{\mu(B(x,r))} \int_{P_{r/2-d,r+d}(x)} |u| + \frac{2dC_\mu^2 \mu(P_{r/2-d,r+d}(x))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |u|$$

$$\leq \frac{2dC_\mu \mu(B(x,2r))}{\mu(B(x,r))} \fint_{B(x,2r)} |u| + \frac{2dC_\mu^2 \mu(B(x,2r))\mu(B(y,2r))}{\mu(B(x,r))\mu(B(y,2r))} \fint_{B(y,2r)} |u|.$$

Po pomnożeniu obustronnie przez $2/r$ oraz wykorzystaniu podwajania miary otrzymujemy

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{4d(x,y)C_\mu^4}{r} \left(\fint_{B(x,2r)} |u| + \fint_{B(y,2r)} |u| \right) \qquad \square$$

Lipszycowskość funkcji silnie harmonicznych

Zauważmy, że dla funkcji silnie harmonicznych

$$A^r u(x) = \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} \fint_{B(x,t)} u(y) d\mu(y) dt = \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} u(x) dt = u(x).$$

Lipszycowskość funkcji silnie harmonicznych

Zauważmy, że dla funkcji silnie harmonicznych

$$A^r u(x) = \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} \fint_{B(x,t)} u(y) d\mu(y) dt = \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} u(x) dt = u(x).$$

Adamowicz–Gaczkowski–Górka dowodząc lokalnej lipszycowskości założyli dodatkowo warunek zanikania miary na pierścieniach z $\delta = 1$:

$$\mu(P_{r,R}(x)) \leq C \left(\frac{R-r}{R} \right)^{\delta} \mu(B(x,R)).$$

Regularność Höldera funkcji ze skończoną amv-normą

Dowiedziemy hölderowskości funkcji ze skończoną amv-normą (Twierdzenia 1) w dwóch krokach:

I wykażemy, że należą do ułamkowej przestrzeni Hajłasza–Sobolewa $M^{\alpha,p}$,

II wykorzystamy ułamkowe zanurzenie Morrey'a $M^{\alpha,p} \subset C^{\alpha-\frac{Q}{p}}$, dowiedzone przez Dachun Yanga na przestrzeniach z miarą podwajającą.

Krok I: Ułamkowa przestrzeń Hajłasza-Sobolewa

Definicja

Niech $p \in (1, \infty]$, $0 < \alpha \leq 1$. Powiemy, że funkcja $u \in M^{\alpha,p}(X)$ o ile $u \in L^p(X)$ oraz istnieje $g \in L^p(X)$

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x,y)^\alpha [g(x) + g(y)]$$

dla μ-p.w. $x, y \in X$.

Krok I: Ułamkowa przestrzeń Hajłasza-Sobolewa

Definicja

Niech $p \in (1, \infty]$, $0 < \alpha \leq 1$. Powiemy, że funkcja $u \in M^{\alpha,p}(X)$ o ile $u \in L^p(X)$ oraz istnieje $g \in L^p(X)$

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x,y)^\alpha [g(x) + g(y)]$$

dla μ-p.w. $x, y \in X$.

Twierdzenie 2

Niech X będzie przestrzenią metryczną z miarą podwajająca, $u \in AMV^p(X)$. Wówczas $u \in M^{1/2,p}(X)$.

Ponadto, jeśli $u \in M^{\alpha,p}(X)$ dla $\alpha \in (0,1)$, to $u \in M^{\alpha',p}(X)$ gdzie

$$\alpha' = \frac{2 - 1/p}{3 - \alpha - 1/p} > \alpha.$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.1

Ustalmy $x, y \in B(x_0, r)$, $d(x,y) < r < 1$.

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - A^r u(x)| + |u(y) - A^r u(y)| + |A^r u(x) - A^r u(y)|$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.1

Ustalmy $x, y \in B(x_0, r)$, $d(x, y) < r < 1$.

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - A^r u(x)| + |u(y) - A^r u(y)| + |A^r u(x) - A^r u(y)|$$

Oszacujmy dwa pierwsze wyrażenia:

$$|u(x) - A^r u(x)| \leq \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} \left| u(x) - \fint_{B(x,t)} u(y) d\mu(y) \right| dt = 2r \int_{r/2}^{r} \frac{t^2}{r^2} |\Delta^t u(x)| dt$$

$$\leq 2r \int_{r/2}^{r} |\Delta^t u(x)| dt \leq 2r \int_{0}^{r} |\Delta^t u(x)| dt$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.1

Ustalmy $x, y \in B(x_0, r)$, $d(x,y) < r < 1$.

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - A^r u(x)| + |u(y) - A^r u(y)| + |A^r u(x) - A^r u(y)|$$

Oszacujmy dwa pierwsze wyrażenia:

$$|u(x) - A^r u(x)| \leq \frac{2}{r} \int_{r/2}^{r} \left| u(x) - \fint_{B(x,t)} u(y) d\mu(y) \right| dt = 2r \int_{r/2}^{r} \frac{t^2}{r^2} |\Delta^t u(x)| dt$$
$$\leq 2r \int_{r/2}^{r} |\Delta^t u(x)| dt \leq 2r \int_{0}^{r} |\Delta^t u(x)| dt$$

Lemat A:

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{C d(x,y)}{r} \left(\fint_{B(x,2r)} |u - c| + \fint_{B(y,2r)} |u - c| \right)$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.2

Zauważmy, że prawą stronę Lematu A można oszacować:

$$\fint_{B(x,2r)} |u-c| + \fint_{B(y,2r)} |u-c| \leq \frac{\mu(B(x,3r))}{\mu(B(x,2r))} \fint_{B(x,3r)} |u-c| + \frac{\mu(B(x,3r))}{\mu(B(y,2r))} \fint_{B(x,3r)} |u-c|$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.2

Zauważmy, że prawą stronę Lematu A można oszacować:

$$\fint_{B(x,2r)} |u-c| + \fint_{B(y,2r)} |u-c| \leq \frac{\mu(B(x,3r))}{\mu(B(x,2r))} \fint_{B(x,3r)} |u-c| + \frac{\mu(B(x,3r))}{\mu(B(y,2r))} \fint_{B(x,3r)} |u-c|$$

$$\leq \left(C_\mu + \frac{\mu(B(x,3r))}{\mu(B(x,r))} \right) \fint_{B(x,3r)} |u-c| = C \fint_{B(x,3r)} |u-c|$$

Wybierzmy $c = \fint_{B(x,3r)} u = u_{3r}(x)$. Wówczas

$$|A^r u(x) - A^r u(y)| \leq \frac{Cd(x,y)}{r} \fint_{B(x,3r)} |u - u_{3r}(x)|$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.3

Podsumowując

$$|u(x) - u(y)| \leq 2r\Big(\int_0^r |\Delta^t u(x)| dt + \int_0^r |\Delta^t u(y)| dt\Big) + \frac{Cd(x,y)}{r} \fint_{B(x,3r)} |u - u_{3r}(x)|$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.3

Podsumowując

$$|u(x) - u(y)| \leq 2r\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|dt + \int_0^r |\Delta^t u(y)|dt\right) + \frac{Cd(x,y)}{r} \fint_{B(x,3r)} |u - u_{3r}(x)|$$

Dobierzmy $r = d(x,y)^{1/2} > d(x,y)$:

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x,y)^{1/2}[g(x) + g(y)],$$

gdzie $g(x) = 2\int_0^1 |\Delta_t u(x)|dt + C\mathcal{M}_3 u(x)$. Stąd $u \in M^{1/2,p}(X)$.

Dowód Twierdzenia 2 cz.4

Załóżmy teraz, że $u \in M^{\alpha,p}(X)$. Oszacujemy prawą stronę nierówności

$$|u(x) - u(y)| \leq 2r\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|dt + \int_0^r |\Delta^t u(y)|dt\right) + \frac{Cd(x,y)}{r} \fint_{B(x,3r)} |u - u_{3r}(x)|$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.4

Załóżmy teraz, że $u \in M^{\alpha,p}(X)$. Oszacujemy prawą stronę nierówności

$$|u(x) - u(y)| \leq 2r\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|dt + \int_0^r |\Delta^t u(y)|dt\right) + \frac{Cd(x,y)}{r} \fint_{B(x,3r)} |u - u_{3r}(x)|$$

Zastosujmy nierówność Höldera do pierwszych dwóch wyrazów

$$r\int_0^r |\Delta^t u(x)|dt \leq r\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p\right)^{1/p} r^{\frac{p-1}{p}} = r^{2-\frac{1}{p}}\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p\right)^{1/p}$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.4

Załóżmy teraz, że $u \in M^{\alpha,p}(X)$. Oszacujemy prawą stronę nierówności

$$|u(x) - u(y)| \leq 2r\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)| dt + \int_0^r |\Delta^t u(y)| dt\right) + \frac{Cd(x,y)}{r} \fint_{B(x,3r)} |u - u_{3r}(x)|$$

Zastosujmy nierówność Höldera do pierwszych dwóch wyrazów

$$r \int_0^r |\Delta^t u(x)| dt \leq r \left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p \right)^{1/p} r^{\frac{p-1}{p}} = r^{2-\frac{1}{p}} \left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p \right)^{1/p}$$

Z ułamkowej nierówności Hajłasza szacujemy ostatni wyraz

$$\fint_{B(x,3r)} |u - u_{3r}(x)| \leq \fint_{B(x,3r)} \fint_{B(x,3r)} |u(w) - u(z)| \leq \fint_{B(x,3r)} \fint_{B(x,3r)} d(w,z)^\alpha [g(w) + g(z)]$$

$$= (6r)^\alpha \fint_{B(x,3r)} \fint_{B(x,3r)} \left(\frac{d(w,z)}{6r} \right)^\alpha [g(w) + g(z)] \leq (6r)^\alpha [g_{6r}(x) + g_{6r}(y)]$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.5

Podsumowując

$$|u(x) - u(y)| \leq Cr^{2-1/p} \left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p + |\Delta^t u(y)|^p \right)^{1/p} + C\frac{d(x,y)}{r^{1-\alpha}} [g_{6r}(x) + g_{6r}(y)]$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.5

Podsumowując

$$|u(x)-u(y)| \leq Cr^{2-1/p}\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p + |\Delta^t u(y)|^p\right)^{1/p} + C\frac{d(x,y)}{r^{1-\alpha}}[g_{6r}(x)+g_{6r}(y)]$$

Dobierzmy r tak, by

$$r^{2-1/p} = \frac{d(x,y)}{r^{1-\alpha}},$$

Dowód Twierdzenia 2 cz.5

Podsumowując

$$|u(x) - u(y)| \leq C r^{2-1/p} \left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p + |\Delta^t u(y)|^p \right)^{1/p} + C \frac{d(x,y)}{r^{1-\alpha}} [g_{6r}(x) + g_{6r}(y)]$$

Dobierzmy r tak, by

$$r^{2-1/p} = \frac{d(x,y)}{r^{1-\alpha}},$$

czyli $r = d(x,y)^{1/(3-\alpha-1/p)}$.

Dowód Twierdzenia 2 cz.5

Podsumowując

$$|u(x)-u(y)| \leq Cr^{2-1/p}\left(\int_0^r |\Delta^t u(x)|^p + |\Delta^t u(y)|^p\right)^{1/p} + C\frac{d(x,y)}{r^{1-\alpha}}[g_{6r}(x)+g_{6r}(y)]$$

Dobierzmy r tak, by

$$r^{2-1/p} = \frac{d(x,y)}{r^{1-\alpha}},$$

czyli $r = d(x,y)^{1/(3-\alpha-1/p)}$. Wówczas

$$|u(x)-u(y)| \leq Cd(x,y)^{\alpha'}[g'(x)+g'(y)],$$

gdzie

$$\alpha' = \frac{2-1/p}{3-\alpha-1/p}$$

oraz

$$g'(x) = C\left(\int_0^1 |\Delta^t u(x)|^p\right)^{1/p} + CM_6 g(x) \qquad \square$$

Regularność Hajłasza–Sobolewa funkcji ze skończoną amv-normą

Z Tw. 2: $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_{n+1} = \frac{2-1/p}{3-\alpha_n-1/p} \nearrow 1$.

Twierdzenie 3

Jeżeli X ma miarę podwajającą, a $u \in AMV^p(X)$, to funkcja $u \in M^{\alpha,p}(X)$ dla każdego $0 < \alpha < 1$.

Regularność Hajłasza–Sobolewa funkcji ze skończoną amv-normą

Z Tw. 2: $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_{n+1} = \frac{2-1/p}{3-\alpha_n-1/p} \nearrow 1$.

Twierdzenie 3

Jeżeli X ma miarę podwajającą, a $u \in AMV^p(X)$, to funkcja $u \in M^{\alpha,p}(X)$ dla każdego $0 < \alpha < 1$.

Krok 2 dowodu Twierdzenia 1

Twierdzenie 1

Jeżeli $u \in AMV^p(\Omega)$ i $p > Q$, to u jest lokalnie α-hölderowska, o ile $\alpha < 1 - Q/p$.

Ustalmy $\alpha < 1 - Q/p$ i $u \in AMV^p$.

Krok 2 dowodu Twierdzenia 1

Twierdzenie 1

Jeżeli $u \in AMV^p(\Omega)$ i $p > Q$, to u jest lokalnie α-hölderowska, o ile $\alpha < 1 - Q/p$.

Ustalmy $\alpha < 1 - Q/p$ i $u \in AMV^p$.
Z Tw. 3 funkcja $u \in M^{\beta,p}(B)$ dla każdego $0 < \beta < 1$.

Krok 2 dowodu Twierdzenia 1

Twierdzenie 1

Jeżeli $u \in AMV^p(\Omega)$ i $p > Q$, to u jest lokalnie α-hölderowska, o ile $\alpha < 1 - Q/p$.

Ustalmy $\alpha < 1 - Q/p$ i $u \in AMV^p$.
Z Tw. 3 funkcja $u \in M^{\beta,p}(B)$ dla każdego $0 < \beta < 1$.
Wybierzmy β tak, by $\alpha < \beta - Q/p$ oraz $\beta p > Q$.

Krok 2 dowodu Twierdzenia 1

Twierdzenie 1

Jeżeli $u \in AMV^p(\Omega)$ i $p > Q$, to u jest lokalnie α-hölderowska, o ile $\alpha < 1 - Q/p$.

Ustalmy $\alpha < 1 - Q/p$ i $u \in AMV^p$.
Z Tw. 3 funkcja $u \in M^{\beta,p}(B)$ dla każdego $0 < \beta < 1$.
Wybierzmy β tak, by $\alpha < \beta - Q/p$ oraz $\beta p > Q$.

Ułamkowe zanurzenie Morrey'a

Niech X będzie lokalnie zwarta z miarą podwajającą, $B \subset X$, $0 < \beta \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ oraz $\beta p > Q$. Wówczas

$$M^{\beta,p}(B) \subset C^{\beta - Q/p}(B).$$

Krok 2 dowodu Twierdzenia 1

Twierdzenie 1

Jeżeli $u \in AMV^p(\Omega)$ i $p > Q$, to u jest lokalnie α-hölderowska, o ile $\alpha < 1 - Q/p$.

Ustalmy $\alpha < 1 - Q/p$ i $u \in AMV^p$.
Z Tw. 3 funkcja $u \in M^{\beta,p}(B)$ dla każdego $0 < \beta < 1$.
Wybierzmy β tak, by $\alpha < \beta - Q/p$ oraz $\beta p > Q$.

Ułamkowe zanurzenie Morrey'a

Niech X będzie lokalnie zwarta z miarą podwajającą, $B \subset X$, $0 < \beta \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ oraz $\beta p > Q$. Wówczas

$$M^{\beta,p}(B) \subset C^{\beta - Q/p}(B).$$

Stąd u jest α-hölderowsko ciągła. $\square$

Twierdzenie 4

Przestrzeń $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, metryka d indukowana przez normę, μ ważona miara Lebesgue'a $d\mu = w dx$, w dodatnia i analityczna.

Funkcja u jest silnie harmoniczna na (Ω, d, μ) wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabym rozwiązaniem

$$\sum_{|\nu|=j} A^\nu \left(D^\nu(uw) - uD^\nu w\right) = 0, \qquad \text{dla } j = 2, 4, 6, \ldots \tag{1}$$

Współczynniki A_ν są zdefiniowane przez:

$$A^\nu := \binom{j}{\nu} \int_{B(0,1)} x^\nu dx.$$

Charakteryzacja funkcji asymptotycznie harmonicznych

Twierdzenie 5

Przestrzeń $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, metryka d indukowana przez normę, μ ważona miara Lebesgue'a $d\mu = w dx$, w dodatnia i gładka.

Funkcja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ jest asymptotycznie harmoniczna na (Ω, d, μ) wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabym rozwiązaniem

$$\sum_{|\nu|=2} A^\nu \left(D^\nu (uw) - u D^\nu w \right) = 0.$$

Dziękuję za uwagę